

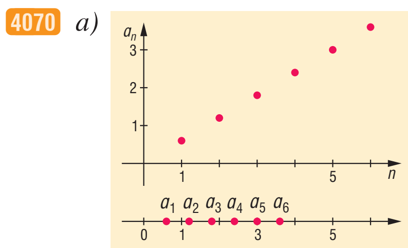
12.2. SZÁMSOROZATOK

A sorozat fogalma, példák sorozatokra – megoldások

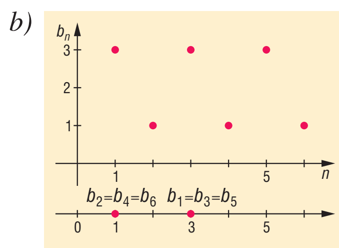
4068 *a)* $a_5 = -2, \quad a_{20} = 28;$ *b)* $b_5 = 75, \quad b_{20} = 0;$ *c)* $c_5 = -100, \quad c_{20} = 200;$
d) $d_5 = 53, \quad d_{20} = 7703;$ *e)* $e_5 = \sqrt{19}, \quad e_{20} = 8;$ *f)* $f_5 = \sqrt{21} - 5, \quad f_{20} = -11;$
g) $g_5 = 0, \quad g_{20} = \frac{45}{41};$ *h)* $h_5 = 11, \quad h_{20} = \frac{397}{17}$

4069 *a)* $a_n = 4 + n;$ *b)* $b_n = 2n - 5;$ *c)* $c_n = -2^{n-1};$
d) $d_n = (-1)^{n+1};$ *e)* $e_n = \frac{1}{n};$ *f)* $f_n = \sqrt[n+1]{7};$
g) $g_n = \log_2 n;$ *h)* $h_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 3k+1, \\ 2, & \text{ha } n = 3k+2, \\ 3, & \text{ha } n = 3k. \end{cases}$

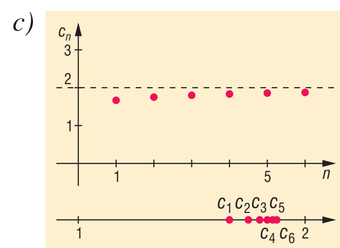
4070 *a)*



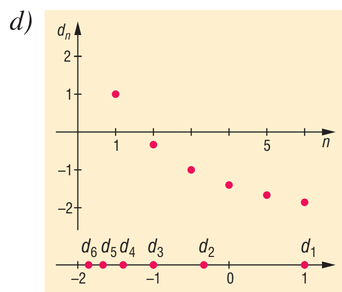
b)



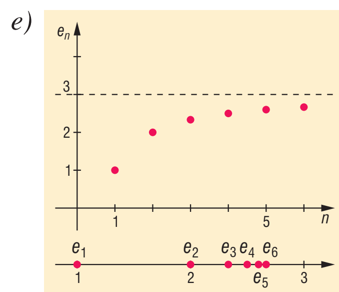
c)



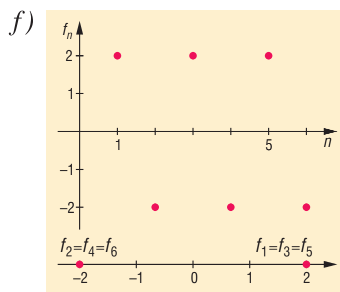
d)



e)



f)



4071 *a)* $16; \quad 4; \quad 1; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{16}; \quad \frac{1}{64};$ *b)* 2006; 2002; 1998; 1994; 1990; 1986;
c) $\sqrt{3}; \quad \sqrt{7}; \quad \sqrt{11}; \quad \sqrt{15}; \quad \sqrt{19}; \quad \sqrt{23}.$

4072 $a_{2010} = 1, \quad S_{2010} = 6030.$

4073 *a)* $a_{50} = 12 = b_{25};$ *b)* $a_{12} = 4 = b_{99};$ *c)* $a_{60} = 1 = b_{67};$
d) $a_{43} = \frac{1}{2} < b_{101} = \frac{7}{13};$ *e)* $a_{77} = 3 > b_7 = 2.$

4074 *a)* $n = 6;$ *b)* $n = 10;$ *c)* $n = 11;$
d) $n = 12;$ *e)* $n = 2^{30};$ *f)* $n = 1; 5; 13; 17; \ldots$



Példák rekurzív sorozatokra – megoldások

4075 *a)* 5; 4; 2; –2; –10; *b)* 5; 6; 3; 12; –15;

c) $5;\ \frac{7}{3};\ \frac{5}{9};\ -\frac{17}{27};\ -\frac{115}{81};$ *d)* $5;\ \frac{5}{2};\ \frac{5}{6};\ \frac{5}{24};\ \frac{1}{24}.$

4076 Építsük fel a sorozatot: $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4$ és a negyedik tagtól kezdve:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},$$

tehát a további tagok:

$$a_4 = 7;\quad a_5 = 13;\quad a_6 = 24;\quad a_7 = 44;\quad a_8 = 81;\quad a_9 = 149;\quad a_{10} = 274.$$

Tehát 274-féleképpen érhetünk fel.

4077 A sorozat tagjai: 1; 1; 1; 1; 1, …, tehát $a_{2010} = 1$ és $S_{2010} = 2010$.

4078 A sorozat tagjai: 1; 1; 0; –1; –1; 0; 1; 1; …, látható, hogy egy hatos periódus után újra ugyanazok a számok lesznek a sorozat elemei.

Mivel $2009 = 6 \cdot 334 + 5$, a 2009-edik tag –1 lesz.

Egy periódusban a számok összege 0, mivel a hatodik elem is 0, az első 2009 tag összege is 0.

4079 Vizsgáljuk meg a sorozat tagjait:

$$a_3 = \frac{q+1}{p};\quad a_4 = \frac{\frac{q+1}{p}+1}{q} = \frac{p+q+1}{p\cdot q};\quad a_5 = \frac{\frac{p+q+1}{p\cdot q}+1}{\frac{q+1}{p}} = \frac{(p+1)\cdot(q+1)}{p\cdot q}\cdot\frac{p}{q+1} = \frac{p+1}{q};$$

$$a_6 = \frac{\frac{p+1}{q}+1}{\frac{p+q+1}{p\cdot q}} = p;\quad a_7 = \frac{p+1}{\frac{p+1}{q}} = q.$$

A tagok ismétlődnek, a periódus öt. Tehát:

$$a_{2014} = a_4 = \frac{p+q+1}{p\cdot q}.$$

4080 *a)* Lehet, például: 1; 2009; 2010; …

b) Ha a második tag x, a sorozat tagjai:

$$1;\quad x;\quad 1+x;\quad 2\cdot(1+x);\quad 4\cdot(1+x);\quad 8\cdot(1+x);\quad \ldots;\quad a_n = 2^{n-3}\cdot(1+x).$$

A $2^{n-3}\cdot(1+x) = 1000$ egyenlet legnagyobb megoldása $n = 6$, ekkor $x = 124$.

Számtani sorozatok – megoldások

4081 *a)* $a_{11} = 23$; *b)* $a_{56} = 158$; *c)* $a_{237} = 701$; *d)* $a_{2010} = 6020$.

4082 *a)* 46; *b)* 91; *c)* 9721.

4083 *a)* 2773-adik; *b)* 3016-odik; *c)* nem tagja a sorozatnak.

4084 $d = -1$.

4085 *a)* 116; *b)* 798.



4086 *a)* $a_6 = 23 + 5 \cdot 5 = 48$ km. *b)* $S_7 = 266$ km.

4087 A világcsúcs 158 kg.

4088 *a)* $a_1 = 7$ és $d = 3$. *b)* $S_{40} = 2620$.

4089 *a)* $a_1 = 50$ és $d = -4$. *b)* $S_{50} = -2400$.

4090 Igen, mivel

$$\frac{11\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3\sqrt{5}+1+8\sqrt{5}-2}{2}.$$

A sorozat különbsége:

$$d = \frac{5\sqrt{5}-3}{2}.$$

4091 *a)* A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 2d + a_1 + 7d &= 34 \\ a_1 + d + a_1 + 10d &= 46 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = -10$ és $d = 6$.

b) $2012 = a_{338}$.

4092 Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + (a_1 + 3d) &= 38 \\ (a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) &= 16 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 4$ és $a_1 = 13$.

a) 92; *b)* 101; *c)* 7860.

4093 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 + 4d)\cdot(a_1 + 9d) &= -25 \\ 2a_1 + 8d &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = 13$ és $d = -2$.

4094 Az egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} 3a_1 + 3d &= -9 \\ 3a_1 + 9d &= 39 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 8$ és $a_1 = -11$.

4095 Az egyenletrendszerünk a következő:

$$\left.\begin{aligned} 8a_1 + 28d &= 14 \\ 4a_1 + 26d &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = -\frac{1}{2}$ és $a_1 = \frac{7}{2}$.

4096 A feltétel szerint:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} = \frac{4a_1 + 6d}{4a_1 + 22d} = \frac{1}{3}, \quad \text{amiből} \quad d = 2a_1.$$

A keresett arány:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}}{a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{20}} = \frac{10a_1 + 45d}{10a_1 + 145d} = \frac{1}{3}.$$



4097 A feltétel alapján:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}}=\frac{(a_5-4d)+(a_5-3d)+(a_5-2d)+(a_5-d)+a_5}{(a_5+d)+(a_5+2d)+(a_5+3d)+(a_5+4d)+(a_5+5d)}=$$

$$=\frac{50-10d}{50+15d}=\frac{1}{5},$$

ebből pedig a sorozat differenciája: $d=\frac{40}{13}$.

4098 *a)* Mivel $a_1=3$ és $d=8$, ezért: $a_n=2011=251\cdot 8+3$, amiből leolvasható, hogy $n=252$.
A $2011=3+(n-1)\cdot 8$ egyenlet megoldásából szintén $n=252$ adódik.
Tehát 252 házhoz kézbesített levelet a postás.

b) Mivel $a_1=6$ és $d=10$, továbbá az utolsó 6-ra végződő házszám a 2006, ezért felírható: $a_n=2006=200\cdot 10+6$, amiből leolvasható, hogy $n=201$.
A $2006=6+(n-1)\cdot 10$ egyenlet megoldásából szintén $n=201$ adódik.
Tehát 201 házhoz kézbesített levelet a postás.

4099 A számtani sorozat első k elemének összege $S_k=\frac{a_1+a_k}{2}\cdot k$, ez alapján: $k=28$.

4100 A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\frac{2\cdot 17+(n-1)\cdot 10}{2}\cdot n=1472.$$

Rendezett alakja: $5n^2+12n-1472=0$, megoldásai $n_1=16$ és $n_2=-18{,}4$. Természetesen csak a pozitív egész szám lehet megoldás. Tehát 16 számot adtunk össze.

4101 Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned}5010&=\frac{2a_1+3\cdot(n-1)}{2}\cdot n\\ 6895&=\frac{2a_1+3\cdot(n+9)}{2}\cdot(n+10)\end{aligned}\right\}.$$

Az a_1 kiejtése után a $3n^2-347n+10\,020=0$ egyenletet kapjuk, amelynek pozitív egész megoldása: $n=60$, ebből $a_1=-5$.

4102 *a)* A következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{44+(n-1)\cdot 5}{2}\cdot n=385,\qquad \text{ahonnan}\qquad 5n^2+39n-770=0.$$

Ennek pozitív megoldása: $n\approx 9{,}12$, tehát 10 nap alatt ki tudja olvasni a könyvet.

b) $S_9=378$, tehát a tizedik napra csak 7 oldal olvasnivaló marad.

4103 Egy vágásnál 9-cel nő a lapok száma, ha összesen k darab lapot vágtunk el:

$$2010=30+9k\quad\Rightarrow\quad k=220.$$

Tehát 220 lap szétvágásával létrejöhetett 2010 darab, valószínűleg jól számolt az illető.

4104 Az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$10\,000\le 13+17\cdot(n-1)\le 99\,999.$$

Azt kapjuk, hogy $588{,}47\le n\le 5882{,}53$. Az első ötjegyű tag: $a_{589}=10\,009$, az utolsó ötjegyű tag: $a_{5882}=99\,990$. Tehát a sorozatnak 5294 ötjegyű tagja van.



4105 Ha a középső oldal b és a sorozat különbsége d, akkor az oldalak:

$$b-d;\quad b;\quad b+d.$$

Ha az utóbbi az átfogó, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$(b-d)^2+b^2=(b+d)^2,$$

amiből $b^2=4bd$. Mivel $b\neq 0$, ezért $b=4d$.

Tehát a háromszög oldalai: $3d$; $4d$; $5d$.

Az egyik hegyesszög:

$$\sin\alpha=\frac{3d}{5d}=\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\alpha=36{,}87°.$$

A másik hegyesszög: $\beta=53{,}13°$.

4106 Ha az oldalak hossza:

$$b-d;\quad b;\quad b+d;$$

a kerületből: $b=40$. A másik feltételből:

$$(40-d)\cdot(40+d)=1431,\quad\text{azaz}\quad 1600-d^2=1413,$$

amiből $d=13$ vagy $d=-13$.

Így az oldalak hossza: 27 cm, 40 cm és 53 cm.

A területet Héron-képlettel érdemes számolni: $T\approx 526{,}5\ \text{cm}^2$.

4107 Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180°$. A számtani sorozat miatt:

$$(n-2)\cdot 180°=\frac{142{,}5+172{,}5}{2}\cdot n,$$

melynek megoldása: $n=16$.

4108 Az első 201 természetes szám összege:

$$1+2+3+\ldots+201=201\cdot 101=20\,301.$$

Ha az összegbe k helyett $-k$ kerül, akkor $2k$-val csökken. Mivel kezdetben páratlan volt az összeg, nem kaphatunk 2010-et.

4109 Például nincs 3-ra végződő négyzetszám, ezért az $a_n=10n+3$ megfelel, de megoldás lehet a $b_n=16n+7$ is.

4110 Ha az első szám $\overline{ab}$, akkor a számok:

$$10a+b;\quad 10b+a;\quad 100a+b.$$

Mivel számtani sorozatot alkotnak:

$$10b+a=\frac{10a+b+100a+b}{2},\qquad\text{amiből}\qquad b=6a.$$

Csak a 16; 61; 106 számhármas felel meg.

4111 A feltételek alapján:

$$\left.\begin{aligned}m&=a_1+(k-1)\cdot d\\ k&=a_1+(m-1)\cdot d\end{aligned}\right\}.$$

Kivonva egymásból:

$$m-k=d\cdot[(k-1)-(m-1)]=d\cdot(k-m),$$

ahonnan, mivel $k\neq m$, adódik, hogy:

$$d=-1\quad\text{és}\quad a_1=k+m-1,\quad\text{tehát}\quad a_n=k+m-1-(n-1)=k+m-n.$$



4112 Jelöljük az $\{a_n\}$ sorozat első elemét a_1-gyel, különbségét pedig d-vel. Írjuk fel a $\{b_n\}$ sorozat általános tagját:

$$b_n=\frac{a_{5n-4}+a_{5n}}{2}\cdot 5=\frac{2a_1+(10n-6)\cdot d}{2}\cdot 5=5a_1+25n\cdot d-15d=$$
$$=(5a_1-15d)+25d\cdot n=(5a_1-15d)+(n-1)\cdot 25d+25d=(5a_1+10d)+(n-1)\cdot 25d.$$

Az általános tag azt mutatja, hogy egy olyan számtani sorozatot kapunk, melynek első eleme: $b_1=5a_1+10d$, differenciája pedig $D=25d$.

Mértani sorozatok – megoldások

4113 A sorozat első hat tagja:

$$a_1=-2;\quad a_2=\frac{3}{4};\quad a_3=-\frac{9}{32};\quad a_4=\frac{27}{256};\quad a_5=-\frac{81}{2048};\quad a_6=\frac{243}{16384}.$$

4114 A keresett tagok:

$$a_1=\frac{a_4}{q^3}=-\frac{5}{27};\quad a_6=a_4\cdot q^2=45;\quad a_9=-1215.$$

4115 Mivel:

$$q^3=\frac{a_4}{a_1}=-\frac{1}{8}\quad\Rightarrow\quad q=-\frac{1}{2}.$$

Így a tizedik elem, illetve az első tíz tag összege:

$$a_{10}=20\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^9=-\frac{5}{128},\quad \text{illetve}\quad S_{10}=20\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{1705}{128}.$$

4116 Mivel

$$q^4=\frac{a_5}{a_1}=16\quad\Rightarrow\quad q=2\ \text{ vagy }\ q=-2.$$

Az első esetben: $a_8=-384$ és $S_8=-765$. A második esetben: $a_8=384$ és $S_8=255$.

4117 Mivel

$$q^2=\frac{a_8}{a_6}=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad q=\frac{1}{2}\ \text{ vagy }\ q=-\frac{1}{2}.$$

Az első esetben:

$$a_1=\frac{a_6}{q^5}=896\quad \text{és}\quad S_6=1764.$$

A második esetben:

$$a_1=\frac{a_6}{q^5}=-896\quad \text{és}\quad S_6=-588.$$

4118 Mivel $q=1$, ezért minden tag 23, így $S_9=207$.

4119 Mivel $q=-1$, ezért $S_{100}=0$.



4120 Ha a mértani sorozat elemei:

$$1+x;\quad 8+x;\quad 22+x;$$

akkor

$$(8+x)^2=(1+x)\cdot(22+x).$$

Megoldva az egyenletet: $x=6$, tehát a sorozatunk:

$$7;\quad 14;\quad 28.$$

A sorozat hányadosa: $q=2$.

4121 A hosszak olyan mértani sorozatot alkotnak, ahol $q=1{,}25$ és $a_1=1$.
A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$15=1\cdot 1{,}25^{n-1}.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$n=1+\frac{\lg 15}{\lg 1{,}25}\approx 13{,}14.$$

Tehát a 14. napon éri el a 15 méteres hosszúságot.

4122 Keressük az alábbi egyenlőtlenség megoldásait:

$$10\,000\le 3\cdot 5^{n-1}\le 99\,999.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$\lg 3333{,}33\le \lg 5^{n-1}\le \lg 33333,$$

azaz

$$\frac{\lg 3333{,}33}{\lg 5}\le n-1\le \frac{\lg 33333}{\lg 5},$$

ahonnan

$$6{,}04\le n\le 7{,}47.$$

Tehát a sorozatnak csak a hetedik tagja ötjegyű. Valóban: $a_7=46\,875$.

4123 A következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3&=80\\ a_1\cdot q^4-a_1\cdot q^2&=240 \end{aligned}\right\},$$

kiemelés után:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot q^2\cdot(1+q)&=80\\ a_1\cdot q^2\cdot(q^2-1)&=240 \end{aligned}\right\}.$$

Mivel $q\ne -1$, a második és első egyenlet hányadosából adódik, hogy:

$$\frac{q^2-1}{q+1}=3,$$

tehát $q=4$, a sorozat első eleme $a_1=1$.

4124 *a)* Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot(1+q)&=15\\ a_1\cdot q^2\cdot(1+q)&=60 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldásai:

$$a_1=5 \text{ és } q=2 \quad \text{vagy} \quad a_1=-15 \text{ és } q=-2.$$



b) A megoldást a

$$\frac{16}{q}+16+16q=56, \quad \text{azaz} \quad 2q^2-5q+2=0$$

egyenletből kapjuk:

$$q=2 \text{ és } a_1=8 \quad \text{vagy} \quad q=\frac{1}{2} \text{ és } a_1=32.$$

c) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)&=57 \\ a_1\cdot\left(1-q^2\right)&=15 \end{aligned}\right\}.$$

Elosztva a két egyenletet, adódik hogy:

$$24q^2+5q-14=0.$$

Megoldásai:

$$q=\frac{2}{3} \text{ és } a_1=27 \quad \text{vagy} \quad q=-\frac{7}{8} \text{ és } a_1=64.$$

d) Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot(1+q)&=160 \\ a_1\cdot q^5\cdot(1+q)&=1215 \end{aligned}\right\}.$$

A két egyenlet hányadosából:

$$q^5=\frac{243}{32},$$

ebből adódik, hogy:

$$q=\frac{3}{2} \quad \text{és} \quad a_1=64.$$

4125 A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot\left(1+q+q^2+q^3\right)&=468 \\ a_1\cdot q^4\cdot\left(1+q+q^2+q^3\right)&=292\,500 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletek osztásával kapjuk, hogy $q^4=625$, amiből $q=5$ vagy $q=-5$.
A megoldás:

$$a_1=3 \text{ és } q=5 \quad \text{vagy} \quad a_1=-\frac{9}{2} \text{ és } q=-5.$$

4126 Mivel:

$$\frac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\left(5+3\sqrt{3}\right)=97+56\sqrt{3},$$

a négyzetre emelés és a nevező gyöktelenítése után:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}}\right)^2=\left(7+4\sqrt{3}\right)^2=97+56\sqrt{3},$$

ezért az állítás igaz. A mértani sorozat hányadosa:

$$q=\sqrt{3}-1.$$



4127 Ha a számtani sorozat differenciája d, a feltétel szerint:

$$(10-d)^2=(10-2d)\cdot(10+2d).$$

Az egyenlet két megoldása:

$$d_1=0 \quad \text{és} \quad d_2=4.$$

A számtani sorozat első tagjai és a mértani sorozat hányadosai:

$$d=0 \quad \text{esetén} \quad a_1=10 \quad \text{és} \quad q=1, \quad \text{illetve} \quad d=4 \quad \text{esetén} \quad a_1=-2 \quad \text{és} \quad q=3.$$

4128 Az $\{a_n\}$ számtani sorozatra vonatkozó feltételből: $a_2=2$, így a számok:

$$2-d; \quad 2; \quad 2+d.$$

A $\{b_n\}$ mértani sorozat első három eleme:

$$7-d; \quad 4; \quad 3+d.$$

Ebből:

$$4^2=(7-d)\cdot(3+d),$$

ennek megoldásai:

$$d_1=5 \quad \text{és} \quad d_2=-1.$$

Az első esetben: $q_1=2$ és $b_1=2$, a második esetben: $q_2=\frac{1}{2}$ és $b_1=8$.

4129 A mértani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q}; \quad 12; \quad 12q.$$

A számtani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q}+4; \quad 15; \quad 12q+1.$$

A számtani sorozat tulajdonságából:

$$15=\frac{\frac{12}{q}+4+12q+1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad 12q^2-25q+12=0,$$

ezt megoldva:

$$q_1=\frac{4}{3} \quad \text{és} \quad q_2=\frac{3}{4}.$$

4130 Ha a legkisebb oldal a, és a sorozat hányadosa q, $q>1$, akkor az oldalak:

$$a; \quad aq; \quad aq^2.$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$a^2+(aq)^2=\left(aq^2\right)^2.$$

Mivel $a\neq 0$, eloszthatjuk az egyenletet, és a $q^4-q^2-1=0$ negyedfokú egyenlethez jutunk. Megoldva:

$$\left(q^2\right)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

mivel $q^2>0$, ezért adódik, hogy:

$$q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

A háromszög hegyesszögei:

$$\cos\alpha=\frac{a}{aq^2}=\frac{1}{q^2},$$

ebből $\alpha=51{,}83°$, a másik szög $\beta=38{,}17°$.



4131 Az oldalak hossza:

$$9;\quad 9q;\quad 9q^2.$$

A kerület:

$$19 = 9 + 9q + 9q^2,$$

ebből:

$$q_1 = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad q_2 = -\frac{5}{3}.$$

Természetesen csak a $q = \frac{2}{3}$ megoldás.

A háromszög oldalai: 9 cm, 6 cm, 4 cm.

A legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemben van, koszinusztétellel számolva:

$$\cos\alpha = \frac{6^2 + 4^2 - 9^2}{48} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 127{,}17°.$$

A háromszög legnagyobb szöge $\alpha = 127{,}17°$.

4132 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 63 \\ a_2 \cdot (a_1 + a_3) &= 810 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldáshoz vezessünk be új változót, legyen $x = a_1 + a_3$, a kapott

$$\left.\begin{aligned} a_2 + x &= 63 \\ a_2 \cdot x &= 810 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $a_2 = 45$ és $x = 18$, vagy $a_2 = 18$ és $x = 45$.

I. Ha $a_2 = 45$ és $x = 18$, akkor a $18 = \frac{45}{q} + 45q$ egyenletnek nincs megoldása.

II. Ha $a_2 = 18$ és $x = 45$, akkor a $45 = \frac{18}{q} + 18q$ egyenlet megoldásai és a keresett sorozat:

$$q_1 = 2,\quad a_1 = 9 \quad \text{vagy} \quad q_2 = \frac{1}{2},\quad a_1 = 36.$$

4133 Legyenek a számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = x - d;\quad a_2 = x;\quad a_3 = x + d;\quad d \neq 0.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = a_1 \cdot a_2 = (x - d) \cdot x;\quad b_n = a_2 \cdot a_3 = x \cdot (x + d);\quad b_{n+1} = a_3 \cdot a_1 = x^2 - d^2.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, vagyis:

$$[x \cdot (x + d)]^2 = (x - d) \cdot x \cdot (x^2 - d^2).$$

A műveletek elvégzése után, mivel $d \neq 0$, $x \neq 0$, $x + d \neq 0$, adódik, hogy: $d = 3x$.

A számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = -2x;\quad a_2 = x;\quad a_3 = 4x.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = -2x^2;\quad b_n = 4x^2;\quad b_{n+1} = -8x^2.$$

A keresett hányados: $q = -2$.



4134 Jelöljük x-szel a sorozat ötödik tagját:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{q}+xq&=-40\\ \frac{x}{q^2}+xq^2&=68\end{aligned}\right\},\quad \text{ebből mivel } x\neq 0:\quad \left.\begin{aligned}\frac{1}{q}+q&=\frac{-40}{x}\\ \frac{1}{q^2}+q^2&=\frac{68}{x}\end{aligned}\right\}.$$

Felhasználva, hogy

$$\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=q^2+\frac{1}{q^2}+2,$$

a kapott egyenlet:

$$\left(\frac{-40}{x}\right)^2=\frac{68}{x}+2.$$

Ennek megoldásai: $x_1=16$ és $x_2=-50$.

Az elsőt visszahelyettesítve:

$$q+\frac{1}{q}=-\frac{5}{2},\quad \text{ebből:}\quad q_1=-2 \quad \text{és}\quad q_2=-\frac{1}{2},$$

a sorozat első tagjai pedig:

$$\{a_1\}_1=1 \quad \text{és}\quad \{a_1\}_2=256.$$

A második esetben $q+\frac{1}{q}=\frac{4}{5}$. Ennek nincs megoldása.

Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása – megoldások

4135 $180\,000\cdot 1{,}07^{10}=354\,087$ Ft.

4136 $9800\cdot 0{,}97^{10}\approx 7227$ fő.

4137 $500\,000\cdot 1{,}06^{8}-500\,000=796\,924-500\,000=296\,924$ Ft lesz a haszon.

4138 $1\,000\,000\cdot 1{,}08^{5}\cdot 1{,}06^{15}=3\,521\,330$ Ft.

4139 A $118\,000\cdot x^{30}=170\,000$ egyenlet megoldása: $x\approx 1{,}0122$, ami 1,22%-os éves növekedést jelent.

4140 A $0{,}87^{x}=0{,}5$ egyenlet megoldása:

$$x=\frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}87}\approx 4{,}98.$$

Ha nem lesz változás, körülbelül 5 év múlva már felére csökken a fecskék száma.

4141 A $6\,506\,300=4\,800\,000\cdot x^{6}$ egyenlet megoldása: $x\approx 1{,}052$, tehát a bank 5,2%-os kamatot adott.

4142 Az $1{,}047^{x}=3$ egyenlet megoldása:

$$x=\frac{\lg 3}{\lg 1{,}047}\approx 23{,}92,$$

tehát 24 év alatt növekszik háromszorosára a betétünk.



4143 *a)* A keresett összeg kiszámítása:

$$(200\,000\cdot 1{,}045^{14}+200\,000\cdot 1{,}045^{13}+200\,000\cdot 1{,}045^{12}+\ldots+200\,000)\cdot 1{,}045^{6}=$$

$$=200\,000\cdot\left(1+1{,}045+1{,}045^{2}+\ldots+1{,}045^{14}\right)\cdot 1{,}045^{6}=$$

$$=200\,000\cdot\frac{1{,}045^{15}-1}{1{,}045-1}\cdot 1{,}045^{6}=5\,413\,249.$$

Tehát 5 413 249 Ft lesz a számlán a gyermek 20 éves korában.

b) Legyen az évente befizetett összeg A. A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$A\cdot 1{,}075^{20}+A\cdot 1{,}075^{19}+\ldots+A\cdot 1{,}075=2\cdot 10^{7}.$$

Mivel a nevezőben egy mértani sorozat első 20 tagjának összege szerepel, ebből

$$A=\frac{2\cdot 10^{7}}{1{,}075+1{,}075^{2}+\ldots+1{,}075^{20}}=\frac{2\cdot 10^{7}}{1{,}075\cdot\dfrac{1{,}075^{20}-1}{1{,}075-1}}.$$

Kiszámítva $A=429\,622$ Ft. Ennyit kell minden évben befizetni.

c) Jelöljük n-nel a befizetések számát.

Akkor érik el a kitűzött összeget, ha igaz lesz az alábbi egyenlet:

$$500\,000\cdot 1{,}086^{n}+500\,000\cdot 1{,}086^{n-1}+\ldots+500\,000\cdot 1{,}086=2\cdot 10^{7}.$$

Kiemelve:

$$500\,000\cdot(1{,}086^{n}+1{,}086^{n-1}+\ldots+1{,}086)=2\cdot 10^{7}.$$

A zárójelben lévő összeg egy mértani sorozat első n tagja, ezért:

$$500\,000\cdot 1{,}086\cdot\frac{1{,}086^{n}-1}{1{,}086-1}=2\cdot 10^{7},$$

amit rendezve $1{,}086^{n}=4{,}1676$.

Mindkét oldal logaritmusával számolva:

$$n=\frac{\lg 4{,}1676}{\lg 1{,}086}\approx 17{,}3.$$

A család dönthet úgy, hogy 17 év után már nem raknak be több pénzt, ekkor 19 355 014 forintot vehetnek fel az év végén.

Ha úgy döntenek, hogy 18 éven keresztül fizetnek, akkor az utolsó év végén 21 562 546 forinthoz jutnak.

4144 A $250\,000\cdot 1{,}05^{x}=400\,000$ egyenletből: $1{,}05^{x}=1{,}6$, ahonnan:

$$x=\frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}05}\approx 9{,}6.$$

Tehát 10 év múlva, azaz 2010 januárjában éri el a betét a 400 000 Ft-ot.

4145 Az első bank öt év múlva

$$1\,000\,000\cdot 1{,}04^{5}+700\,000\cdot 1{,}063^{5}\approx 2\,166\,742 \text{ Ft-ot fizet.}$$

A második bank öt év múlva

$$1\,700\,000\cdot 1{,}019^{20}\approx 2\,477\,038 \text{ Ft-ot fizet.}$$

Tehát a Peták Bankot érdemes választani.



4146 Ha az évenként felvett összeg x, akkor az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$\{[(10^8 \cdot 1{,}05 - x) \cdot 1{,}05 - x] \cdot \ldots \cdot 1{,}05 - x\} = 0.$$

Átrendezve:

$$10^8 \cdot 1{,}05^{20} = x \cdot (1{,}05^{19} + 1{,}05^{18} + \ldots + 1),$$

vagyis

$$x = \frac{10^8 \cdot 1{,}05^{20}}{\frac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05 - 1}} = 8\,024\,258{,}72 \approx 8\,024\,259 \text{ Ft}.$$

Tehát évente $8\,024\,259$ Ft-ot vehet fel a bankból.

4147 *a)* Ha x a havi törlesztőrészlet, akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$15 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{180} - x \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{179} - x \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{178} - \ldots - x = 0.$$

A megoldás:

$$x = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 1{,}006667^{180}}{\frac{1{,}006667^{180} - 1}{1{,}006667 - 1}} = 143\,372 \text{ Ft}.$$

Tehát a havi díj: $143\,372$ Ft.

b) Az évente fizetendő összeg legyen y. Ekkor az egyenletünk:

$$15 \cdot 10^6 \cdot 1{,}08^{15} - y \cdot (1{,}08^{14} + 1{,}08^{13} + \ldots + 1) = 0.$$

A megoldás:

$$y = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 1{,}08^{15}}{\frac{1{,}08^{15} - 1}{1{,}08 - 1}} = 1\,752\,443,$$

ebből a havi díj: $146\,037$ Ft.

c) Az első esetben a $\frac{180 \cdot 143\,372}{15\,000\,000} = 1{,}72$, a második esetben a $\frac{15 \cdot 1\,752\,443}{15\,000\,000} = 1{,}752$-szeresét kell visszafizetni.

Vegyes feladatok – megoldások

4148 A megadott számtani sorozat adatai:

$$a_1 = -2, \quad d = 5, \quad S_{30} = 2115.$$

4149 A megadott mértani sorozat adatai:

$$a_1 = 7, \quad q = 2, \quad S_{20} = 7\,340\,025.$$

4150 Célszerű a sorozatok első néhány tagját kiszámítani, majd a kialakult sejtést a definíciók segítségével $\left(a_{n+1} - a_n = d, \text{ illetve } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q\right)$ igazolni.

Számtani sorozatok: *a)*, *b)*, *d)*, ***j)***, ***k)***.
Mértani sorozatok: ***c)***, *g)*, *h)*, *i)*.

4151 $S_{30} = 630\sqrt{3} - 195.$



4152 A következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$500 < 7 + \frac{3}{7} \cdot (n-1) < 1000,$$

ennek megoldása:

$$1151{,}33 < n < 2318.$$

Tehát 1166 tag felel meg.

4153 A három tag szorzatából $a_2 = 105$.
A három tag összegéből:

$$\frac{105}{q} + 105 + 105q = 1687.$$

Az egyenlet megoldásai: $q_1 = 15$ és $q_2 = \frac{1}{15}$.
A feltételnek megfelelő sorozatok: $a_1 = 7$, $q = 15$ és $a_1 = 1575$, $q = \frac{1}{15}$.

4154 Mivel

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 7n - [2 \cdot (n-1)^2 - 7 \cdot (n-1)] = 4n - 9,$$

a sorozat számtani, $a_1 = -5$ és $d = 4$.

4155 Számtani sorozat, ahol: $d = 11$, $a_1 = 1008$, $a_{818} = 9995$, és az összeg: $S_{818} = 4\,500\,227$.

4156 A feltételekből adódik: $q^{17} = \frac{120}{18} = \frac{20}{3}$, azaz $q = \sqrt[17]{\frac{20}{3}}$.

a) Mivel az $a_3 \cdot q^x = 108$, azaz a $q^x = \frac{108}{18} = 6$ egyenlet megoldása

$$x = \frac{\lg 6}{\lg q} = \frac{\lg 6}{\lg \sqrt[17]{\frac{20}{3}}} \approx 16{,}056$$

nem egész szám, ezért a 108 nem tagja a sorozatnak.

b) Mivel $a_3 \cdot q^x = 800$, ezért $q^x = \frac{800}{18} = \frac{400}{9}$, az egyenlet megoldása: $x = 34$, tehát a sorozat 37. tagja 800.

4157 Az egyenletek hányadosait véve: $q^2 = 4$, azaz $q_1 = 2$ vagy $q_2 = -2$.
Visszahelyettesítés után a következő négy sorozat adódik:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2},\ q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = \frac{1}{2},\ q = -2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2},\ q = -2.$$

4158 A feltételekből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 &= \frac{21}{4} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot q} + \frac{1}{a_1 \cdot q^2} &= \frac{7}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletek hányadosát véve: $(a_1 \cdot q)^2 = \frac{9}{4}$. Ebből $a_1 \cdot q = \frac{3}{2}$ vagy $a_1 \cdot q = -\frac{3}{2}$.

Mivel $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (a_2)^3$, a keresett szorzat: $\frac{27}{8}$ vagy $-\frac{27}{8}$.



4159 *a)* Mivel a különbség: $d=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}$, ezért a számok:

$$3;\quad 14\frac{1}{4};\quad 25\frac{1}{2};\quad 36\frac{3}{4};\quad 48.$$

b) Mivel $q^4=16$, ebből $q_1=2$ vagy $q_2=-2$.
A lehetséges számok:

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48\quad \text{vagy}\quad 3;\ -6;\ 12;\ -24;\ 48.$$

4160 Mivel az első három tag összege 18, ezért a számtani sorozatban $a_2=6$.
A számtani sorozat elemei:

$$6-d;\quad 6;\quad 6+d;$$

a mértani sorozat elemei:

$$7-d;\quad 6;\quad 6+d.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján:

$$6^2=(7-d)\cdot(6+d).$$

Az egyenlet megoldásai: $d_1=3$ és $d_2=-2$.

Az első esetben a számtani sorozatban $a_1=3$ és a mértani sorozatban $q=\frac{3}{2}$.

A második esetben a számtani sorozatban $a_1=8$ és a mértani sorozatban $q=\frac{2}{3}$.

4161 Az első feltétel alapján a számokra:

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2=114.$$

A számtani sorozat miatt:

$$a_1\cdot q=a_1+3d\quad(1)\qquad \text{és}\qquad a_1\cdot q^2=a_1+24d\quad(2).$$

(1)-ből (2)-be helyettesítve:

$$a_1\cdot q^2=a_1+8\cdot(a_1\cdot q-a_1).$$

Mivel $a_1\neq 0$, adódik, hogy:

$$q^2-8q+7=0,\quad \text{ebből}\quad q_1=7\ \text{és}\ q_2=1.$$

Ha $q=7$, az első feltételbe visszahelyettesítve: $a_1=2$, a számok: 2; 14; 98.

Ha $q=1$, akkor $a_1=38$, a számok: 38; 38; 38.

4162 *a)* A feltételek miatt:

$$x=\frac{y+4x-5}{2}\qquad \text{és}\qquad (4x-5)^2=x\cdot(7x+10).$$

A második egyenlet megoldásai: $x_1=5$ és $x_2=\frac{5}{9}$. Az elsőbe helyettesítve: $y_1=-5$ és $y_2=\frac{35}{9}$.
Tehát a négy szám:

$$-5;\ 5;\ 15;\ 45\quad \text{vagy}\quad \frac{35}{9};\ \frac{5}{9};\ -\frac{25}{9};\ \frac{125}{9}.$$

b) Az első esetben a különbség 10, a hányados 3, a második esetben a különbség $-\frac{30}{9}=-\frac{10}{3}$, a hányados pedig -5.

4163 *a)* $41{,}9\cdot10^6\cdot1{,}054^4\approx 51\,710\,230.$

b) $\frac{41{,}9\cdot10^6}{1{,}011^6}\approx 39\,238\,020.$

c) Ha az évenkénti csökkenésnek megfelelő szorzószám p, akkor $48{,}8 \cdot p^5 = 38$, ahonnan:

$$p = \sqrt[5]{\frac{38}{48{,}8}} \approx 0{,}9512.$$

Tehát évente 4,88%-kal csökken a termelés.

d) Jelölje x a 2013 után eltelt évek számát. A $0{,}97^x = 0{,}74$ egyenletből:

$$x = \frac{\lg 0{,}74}{\lg 0{,}97} \approx 9{,}89.$$

10 év múlva, azaz 2023-ban éri el a termelés a 2013-as év 74%-át.

4164 Legyen a visszafizetésig hátralévő hónapok száma n.

Ha minden hónapban 200 000 Ft-ot fizetnek be, akkor n hónap múlva:

$$18 \cdot 10^6 \cdot 1{,}01^n - 200\,000 \cdot (1{,}01^{n-1} + 1{,}01^{n-2} + \ldots + 1{,}01^2 + 1) = 0.$$

A zárójelben egy mértani sorozat első n tagjának összege áll:

$$18 \cdot 10^6 \cdot 1{,}01^n - 200\,000 \cdot \frac{1{,}01^n - 1}{1{,}01 - 1} = 0.$$

Rendezve: $1{,}01^n = 10$, megoldás logaritmussal: $n = \frac{\lg 10}{\lg 1{,}01} \approx 231{,}4.$

Tehát 232 hónap, azaz 19 év és 4 hónap alatt tudják visszafizetni a hitelt.

4165 *a)* A 4,8%-os infláció az árak 1,048-szoros emelkedését jelenti, hasonlóan a többi érték is, tehát négy év alatt az árszínvonal $1{,}048 \cdot 1{,}039 \cdot 1{,}072 \cdot 1{,}214 \approx 1{,}417$-szeresre növekedett, ami 41,7%-os inflációt jelent.

b) Ha az árak 1,068-szorosra emelkedtek, akkor a vásárlóérték az $\frac{1}{1{,}068}$-szorosára csökkent, vagyis $1\,100\,000 \cdot \frac{1}{1{,}068} \approx 1\,029\,963$ Ft lett, ami 70 037 Ft-tal való csökkenést jelent.

c) Ha x az inflációs szorzó, akkor $\frac{620\,000}{680\,000} = \frac{1}{x}$, amiből $x \approx 1{,}0968$. Tehát az infláció mértéke 9,68% volt.

d) A 25 000 Ft-tal való béremelés $\frac{25\,000}{420\,000} \cdot 100 \approx 5{,}95\%$-os emelést jelen, ez nem éri el az infláció mértékét. Béla fizetésének vásárlóértéke $\frac{1{,}0595}{1{,}06} \cdot 100 \approx 99{,}95\%$-ára változott, vagyis 0,05%-kal csökkent.